204	Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.	Equivalence des normes	Monier 3 p.64 Gourdon p.49

Ce théorème permet de choisir le norme que l'on veut sur un evn de dimension finie. Il permet entre autres de voir qu'en dimension finie, "tout est continu". (Gourdon)

Th.1: Dans un K-evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
(formulation de Gourdon).

I. Outils

- Définition d'une norme (Def.1), de normes équivalentes (Def.4).
- Tout ev de dim. finie n admet une base de taille n.
- Définition de la norme ∞
- Relation d'équivalence
- Toute fonction Lipschitzienne est continue.
- Inégalité triangulaire, triangulaire renversée, homogénéité
- Définition de l'Inf, du Sup.
- Dans un K-evn de dim. finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées (Th.2)
- Toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

II. Développement (démo de Monier).

Soit E un K-ev de dimension finie n, où K=ℝ ou ℂ et n∈ℕ.

L'idée est de profiter de la dimension finie pour se placer dans une base, où l'expression des normes est explicite.
Alors E admet au moins une base finie $B=(e_1,\dots e_n)$.

Plutôt que de travailler en toute généralité, on va différencier la norme ∞, et montrer que toutes les autres sont équivalentes à celle-là. Alors, par transitivité de la relation d'équivalence, toutes les normes seront équivalentes entre elles.

Notons $\left|\begin{array}{l} N_\infty : E \to \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \underset{1\le i\le n}{Max}|x_i| \end{array}\right.$

Soit N une norme sur E, nous allons montrer que $N \sim N_\infty$

On va utiliser la continuite de la norme N sur la sphère unité de N∞ pour exhiber les constantes qu'exige la définition de normes équivalentes: ce seront l'Inf et le Sup de la norme N sur la sphère unité (compacte) de N∞.

Notons $S=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in K^n \,/\, \underset{1\le i\le n}{Max}|x_i|=1\right\}$ la sphère unité de (K^n ,N_∞).

Considérons l'application:

$$\begin{array}{l} \nu: \; K^n \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto N\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \end{array}$$

où K^n est muni de la norme usuelle $\|\dots\|_\infty$

→ Montrons que ν est continue (en montrant qu'elle est lipschitzienne) sur K^n:

Pour tous $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ de K^n, on a:

$$\underbrace{|\nu(x)-\nu(y)| \le \nu(x-y)}_{\text{inégalité triangulaire renversée}} = \underbrace{N\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)e_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} N\left[(x_i-y_i)e_i\right]}_{\text{inégalité triangulaire (sous-additivité)}} \underbrace{= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\,N(e_i)}_{\text{homogénéité}} \underbrace{\le \left(\sum_{i=1}^{n}N(e_i)\right).\|x-y\|_\infty}_{\text{définition de la norme } \infty}$$

En posant $M=\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}N(e_i)\right)\in\mathbb{R}_+^*$, on a bien montré que ν est M-lipschitzienne de $\left(K^n,\|\ \|_\infty\right)$ dans $(\mathbb{R},|\ |)$.

Donc ν est continue sur K^n.

→ *Utilisons le fait que ν soit donc bornée et atteigne ses bornes sur S pour exhiber les constantes dont nous avons besoin:*
La sphère-unité S de (K^n ,N_∞) est fermée bornée, donc compacte (Th.2).
Ainsi, la restriction de ν à cet ensemble est bornée et atteint ses bornes.
On peut donc poser: $\alpha = \underset{x\in S}{Inf}\, \nu(x)$ et $\beta = \underset{x\in S}{Sup}\, \nu(x)$.
Comme $0 \notin S$, et que la norme ν est vérifie la condition de séparation, on a: $0 < \alpha \leq \beta$.

On a alors: $\forall x \in S,\ \ \alpha \leq \nu(x) \leq \beta$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On note $x' = (x_1, ..., x_n) \in K^n$.

On a $\frac{1}{\|x'\|_\infty}.x' \in S$, et $N_\infty(x) = \|x'\|_\infty$.

D'après ce qui précède, on a: $\alpha \leq \nu\left(\frac{1}{\|x'\|_\infty}.x'\right) \leq \beta$

$$\alpha \leq \frac{1}{\|x'\|_\infty} \nu(x') \leq \beta$$
$$\alpha.\|x'\|_\infty \leq \nu(x') \leq \beta.\|x'\|_\infty$$
$$\alpha.N_\infty(x) \leq \nu(x') \leq \beta.N_\infty(x)$$

Or $N(x) = \nu(x')$, donc: $\alpha.N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta.N_\infty(x)$, et ceci pour tout x∈E\{0}.
L'inégalité est vraie aussi pour x=0.

Finalemant, on a exhibé $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{\ 2}, \forall x \in E, \alpha N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta N_\infty(x)$

Donc, d'après le Def.4, on a $N \sim N_\infty$.
Ceci est vrai pour toute norme N sur E, donc toutes les normes sur E sont équivalentes.

III. Notes

L'hypothèse K=ℝ ou ℂ est capitale, car ce sont des espaces complets.

Contre-exemple en dim° ∞: Cf. Mon.3 p.20.

EXEMPLE :

Les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sur $E = C([0;1],\mathbb{R})$ (cf. 1.1.1 pp. 5, 6) ne sont pas équivalentes car, en notant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n :

$$[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} n(1-nx) & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$$

on a $\dfrac{||f_n||_\infty}{||f_n||_1} = 2n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ■